Trennung von Groß- und Kleinschäden in Chain Ladder-Rechnungen

Tagung der ASTIN-Gruppe, Davos

Dr. Ulrich Riegel, Swiss Re Europe S.A.

05.09.2014

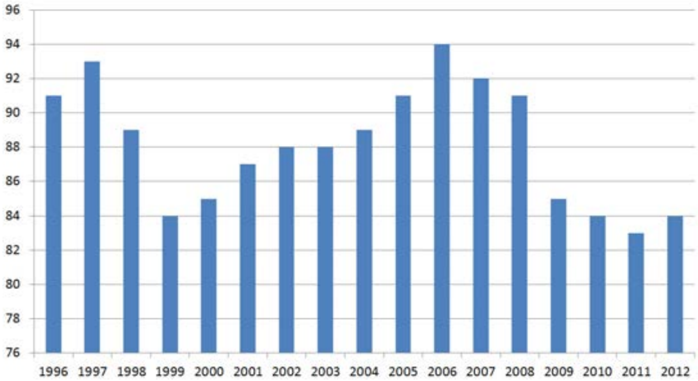
Agenda

- Kappen oder Separieren von Großschäden?
- Problematik beim Separieren von Großschäden
- Suche nach einem stochastischen Modell
- Ein Chain Ladder-basiertes Modell zur Trennung von Groß- und Kleinschäden
- Anhang A: Berechnung des Standardfehlers
- Anhang B: Parameterschätzung

Kappen oder Separieren von Großschäden?

Abstimmung

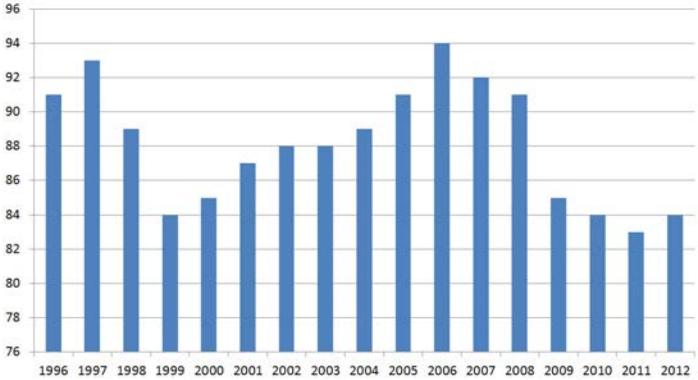
Zeigt folgende Zeitreihe



☐ rein stochastisches Verhalten ☐ eher zyklisches Verhalten

Reservepolitik Kraftfahrt-Haftpflicht Deutschland

Reserve/Zahlungs-Verhältnis für GJ-Schäden KH Deutschland



Quelle: GDV, Bruttoergebnisse des inländischen Direktgeschäfts

Kraftfahrt-Haftpflicht Deutschland

- Die Reserven in deutschem Motorgeschäft werden durch den Prämienzyklus beeinflusst und sind für externe (und manchmal auch interne) Parteien sehr schwer einzuschätzen.
- Daher rechnen Rückversicherer (und auch Reservierungsaktuare) zur Bewertung von KH-Portefeuilles häufig auf Basis der Schadenzahlungen (und nicht des Schadenaufwandes).
- Bei sehr großen Schäden sind die kumulierten Zahlungen aber auch nach zehn oder 15 Abwicklungsjahren meist kein guter Indikator für die ausregulierte Schadenhöhe.
  $\Rightarrow$ Großschäden sollten auf Basis des Aufwandes gerechnet werden
  $\Rightarrow$ Kappung nicht möglich, die Großschäden müssen separiert werden
- Selbst wenn die komplette Rechnung auf Basis Schadenaufwand durchgeführt wird, kann eine Trennung von Groß- und Kleinschäden sinnvoll sein, da die Abwicklungsmuster sehr unterschiedlich sind.

Problematik beim Separieren von Großschäden

Beispiel mit schöner Abwicklung

Abwicklung der Brutto-Schadenlast der Anfalljahre 2010–2013:

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1.000	1.200	1.500	1.800
2011	1.000	1.200	1.500	1.800
2012	1.000	1.200	1.500	1.800
2013	1.000	1.200	1.500	1.800

Beispiel mit schöner Abwicklung

Informationsstand zur Brutto-Schadenlast in 2014:

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1.000	1.200	1.500	1.800
2011	1.000	1.200	1.500	1.800
2012	1.000	1.200	1.500	1.800
2013	1.000	1.200	1.500	1.800

im Jahr $i+j$ bekannt (also insb. in 2014)

in 2014 noch nicht bekannt

Beispiel mit schöner Abwicklung

Informationsstand zur Brutto-Schadenlast in 2014:

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1.000	1.200	1.500	1.800
2011	1.000	1.200	1.500	
2012	1.000	1.200		
2013	1.000			

Beispiel mit schöner Abwicklung

Abwicklung der Großschäden der Anfalljahre 2010–2013:

Anfalljahr i		Abwicklungsjahr j			
		1	2	3	4
2010	Großschaden 2010 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2010 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2010 - 3	10	10	100	150
2011	Großschaden 2011 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2011 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2011 - 3	10	10	100	150
2012	Großschaden 2012 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2012 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2012 - 3	10	10	100	150
2013	Großschaden 2013 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2013 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2013 - 3	10	10	100	150

(Großschadengrenze: $T = 50$)

Beispiel mit schöner Abwicklung

Informationsstand zu Großschäden in 2014:

Anfalljahr i		Abwicklungsjahr j 1	2	3	4
2010	Großschaden 2010 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2010 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2010 - 3	10	10	100	150
2011	Großschaden 2011 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2011 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2011 - 3	10	10	100	150
2012	Großschaden 2012 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2012 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2012 - 3	10	10	100	150
2013	Großschaden 2013 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2013 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2013 - 3	10	10	100	150

- im Jahr $i+j$ bekannt
- in 2014 bekannt, jedoch noch nicht im Jahr $i+j$
- in 2014 noch nicht bekannt

Beispiel mit schöner Abwicklung

Informationsstand zu Großschäden in 2014:

Anfalljahr i		Abwicklungsjahr j: 1	2	3	4
2010	Großschaden 2010 - 1	100	100	100	150
	Großschaden 2010 - 2	10	100	100	150
	Großschaden 2010 - 3	10	10	100	150
2011	Großschaden 2011 - 1	100	100	100	
	Großschaden 2011 - 2	10	100	100	
	Großschaden 2011 - 3	10	10	100	
2012	Großschaden 2012 - 1	100	100		
	Großschaden 2012 - 2	10	100		
	Großschaden 2012 - 3				
2013	Großschaden 2013 - 1	100			
	Großschaden 2013 - 2				
	Großschaden 2013 - 3				

Frage: Nur grüne oder auch die gelben Abwicklungen separieren?

☐ komplette Abwicklung (grün und gelb) ☐ nur grüne Abwicklungen

Beispiel mit schöner Abwicklung

Option 1: Komplette Abwicklung rausnehmen (grün und gelb)

Großschadenlast

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	120	210	300	450
2011	120	210	300	
2012	110	200		
2013	100			

Chain Ladder →

Großschadenlast

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	120	210	300	450
2011	120	210	300	450
2012	110	200	286	429
2013	100	177	253	380

Basisschadenlast

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	880	990	1.200	1.350
2011	880	990	1.200	
2012	890	1.000		
2013	900			

Chain Ladder →

Basisschadenlast

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	880	990	1.200	1.350
2011	880	990	1.200	1.350
2012	890	1.000	1.212	1.364
2013	900	1.012	1.227	1.380

$\Rightarrow$ Basisschäden werden überschätzt, Großschäden werden unterschätzt

Beispiel mit schöner Abwicklung

Option 1: Komplette Abwicklung rausnehmen (grün und gelb)

Gesamtschadenlast

	Abwicklungsjahr *j*			
	1	2	3	4
2010	1.000	1.200	1.500	1.800
2011	1.000	1.200	1.500	1.800
2012	1.000	1.200	1.498	1.792
2013	1.000	1.189	1.480	1.760

$\Rightarrow$ Anfalljahre werden nicht konsistent behandelt

Beispiel mit schöner Abwicklung

Option 2: Nur Abwicklungen rausnehmen bei denen $T = 50$ schon überschritten wurde (also nur grün)

Großschadenlast

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr j: 1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	
2012	100	200		
2013	100			

Chain Ladder →

Großschadenlast

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr j: 1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	450
2012	100	200	300	450
2013	100	200	300	450

Basisschadenlast

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr j: 1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

Chain Ladder →

Basisschadenlast

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr j: 1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	1.350
2012	900	1.000	1.200	1.350
2013	900	1.000	1.200	1.350

Beispiel mit schöner Abwicklung

Option 2: Nur Abwicklungen rausnehmen bei denen $T = 50$ schon überschritten wurde (also nur grün)

Gesamtschadenlast

	Abwicklungsjahr *j*			
	1	2	3	4
2010	1.000	1.200	1.500	1.800
2011	1.000	1.200	1.500	1.800
2012	1.000	1.200	1.500	1.800
2013	1.000	1.200	1.500	1.800

$\Rightarrow$ konsistente Behandlung der Anfalljahre im Beobachtungszeitraum

Beispiel mit schöner Abwicklung

Folgerung:

Will man die Anfalljahre konsistent behandeln, so sollte man die Großschäden nicht mit ihrer kompletten Abwicklung separieren.

Grund dafür ist das unterschiedliche Informationsniveau der Anfalljahre.

Offene Fragen

Fragen:

- Ist es sinnvoll Chain Ladder auf Groß- und Basisschadendreieck aus Option 2 anzuwenden?
- Gibt es hierzu ein plausibles stochastisches Modell?
- Sind die Dreiecke instabiler, wenn man die Großschäden erst ab dem Zeitpunkt separiert zu dem sie bekannt werden (Option 2) und nicht mit ihrer gesamten Abwicklung (Option 1)?

Suche nach einem stochastischen Modell

Notation

$P_{i,j}$ Kumulierte Zahlungen (alternativ: Aufwand) des Anfalljahrs i nach j Abwicklungsjahren ($i, j = 1, \dots, n$)

$N_{i,j}$ Anzahl erkannte Großschäden des Anfalljahres i nach j Abwicklungsjahren

$X^P_{i,\nu,j}$ Kumulierte Zahlungen (alternativ: Aufwand) des ν-ten Großschadens aus Anfalljahr i nach j Abwicklungsjahren

$X^I_{i,\nu,j}$ Aufwand des ν-ten Großschadens aus Anfalljahr i nach j Abwicklungsjahren

Großschäden zum *Informationsniveau* k:

Großschäden, die nach k-Abwicklungsjahren T (mindestens einmal) überschritten haben. Sind die Großschäden nach dem Abwicklungsjahr sortiert, in dem sie T überschreiten, so sind dies die Schäden $X^P_{i,\nu,j}$, $X^I_{i,\nu,j}$ mit $\nu \leq N_{i,k}$.

Notation

Großschadenaufwand zum Informationsniveau k:

$$L_{i,j}^{(k)} := \sum_{\nu=1}^{N_{i,k}} X_{i,\nu,j}^{I}$$

Basisschäden zum Informationsniveau k:

$$A_{i,j}^{(k)} := P_{i,j} - \sum_{\nu=1}^{N_{i,k}} X_{i,\nu,j}^{P}$$

Jeweils bekannt für $i + \max(j, k) \leq n + 1$.

Zusammenhang mit obigem Beispiel

Option 1 ist eine Chain Ladder-Rechnung auf die Dreiecke

$L_{1,1}^{(4)}$	$L_{1,2}^{(4)}$	$L_{1,3}^{(4)}$	$L_{1,4}^{(4)}$
$L_{2,1}^{(3)}$	$L_{2,2}^{(3)}$	$L_{2,3}^{(3)}$	
$L_{3,1}^{(2)}$	$L_{3,2}^{(2)}$		
$L_{4,1}^{(1)}$			

und

$A_{1,1}^{(4)}$	$A_{1,2}^{(4)}$	$A_{1,3}^{(4)}$	$A_{1,4}^{(4)}$
$A_{2,1}^{(3)}$	$A_{2,2}^{(3)}$	$A_{2,3}^{(3)}$	
$A_{3,1}^{(2)}$	$A_{3,2}^{(2)}$		
$A_{4,1}^{(1)}$			

Option 2 ist eine Chain Ladder-Rechnung auf die Dreiecke

$L_{1,1}^{(1)}$	$L_{1,2}^{(2)}$	$L_{1,3}^{(3)}$	$L_{1,4}^{(4)}$
$L_{2,1}^{(1)}$	$L_{2,2}^{(2)}$	$L_{2,3}^{(3)}$	
$L_{3,1}^{(1)}$	$L_{3,2}^{(2)}$		
$L_{4,1}^{(1)}$			

und

$A_{1,1}^{(1)}$	$A_{1,2}^{(2)}$	$A_{1,3}^{(3)}$	$A_{1,4}^{(4)}$
$A_{2,1}^{(1)}$	$A_{2,2}^{(2)}$	$A_{2,3}^{(3)}$	
$A_{3,1}^{(1)}$	$A_{3,2}^{(2)}$		
$A_{4,1}^{(1)}$			

Erinnerung: Chain Ladder-Modell

Chain Ladder-Modell (Mack):

Seien $C_{i,j}$ die kumulierten Zahlungen oder den Schadenaufwand des Anfalljahres i nach j Abwicklungsjahren.

- Die Anfalljahre sind unabhängig.
- Es gibt Konstanten f_j, so dass

$$\mathrm{E}(C_{i,j+1} \,|\, C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}) = f_j \cdot C_{i,j}.$$

- Es gibt Konstanten σ_j, so dass

$$\mathrm{Var}(C_{i,j+1} \,|\, C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 \cdot C_{i,j}.$$

Stochastisches Modell

Frage: Sind Chain Ladder-Annahmen für die Dreiecke aus Option 2 plausibel?

Das würde heißen es gibt $l_j^{(j+1)}$ und $a_j^{(j+1)}$, so dass

$$\mathrm{E}(L_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, \mathcal{B}_j) = l_j^{(j+1)} \cdot L_{i,j}^{(j)},$$
$$\mathrm{E}(A_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, \mathcal{B}_j) = a_j^{(j+1)} \cdot A_{i,j}^{(j)}$$

($\mathcal{B}_j$ bezeichne die Information nach j Abwicklungsjahren)

Stochastisches Modell

Mit der plausiblen Annahme

$$\mathrm{E}(L_{i,j+1}^{(j)} \,|\, \mathcal{B}_j) = l_j^{(j)} \cdot L_{i,j}^{(j)},$$
$$\mathrm{E}(A_{i,j+1}^{(j)} \,|\, \mathcal{B}_j) = a_j^{(j)} \cdot A_{i,j}^{(j)}$$

würde dies bedeuten

$$\mathrm{E}(\underbrace{L_{i,j+1}^{(j+1)} - L_{i,j+1}^{(j)}}_{\text{Aufwand der neuen Großschäden im Abw.-Jahr } j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) = (l_j^{(j+1)} - l_j^{(j)}) \cdot L_{i,j}^{(j)},$$

$$\mathrm{E}(\underbrace{A_{i,j+1}^{(j)} - A_{i,j+1}^{(j+1)}}_{\text{Kum. Zahlungen der neuen Großschäden im Abw.-Jahr } j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) = (a_j^{(j)} - a_j^{(j+1)}) \cdot A_{i,j}^{(j)}.$$

Stochastisches Modell

Anders ausgedrückt:

$$\frac{\mathrm{E}(L_{i,j+1}^{(j+1)} - L_{i,j+1}^{(j)} \,|\, \mathcal{B}_j)}{\mathrm{E}(A_{i,j+1}^{(j)} - A_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, \mathcal{B}_j)} = \mathrm{const}(j) \cdot \frac{L_{i,j}^{(j)}}{A_{i,j}^{(j)}},$$

d.h. das Reserve/Zahlungs-Verhältnis der neuen Großschäden hängt davon ab, ob in den Jahren davor schon viele Großschäden hochgekommen sind.

Noch schlimmer kommt es wenn man die $A_{i,j}^{(k)}$ als Basisschaden-Aufwände (anstatt -Zahlungen) interpretiert. Dann ist

$$L_{i,j+1}^{(j+1)} - L_{i,j+1}^{(j)} = A_{i,j+1}^{(j)} - A_{i,j+1}^{(j+1)}$$

und wir erhalten den offensichtlichen Widerspruch

$$\frac{L_{i,j}^{(j)}}{A_{i,j}^{(j)}} = \mathrm{const}(j).$$

Stochastisches Modell

Folgerung:

Chain Ladder-Annahmen sind für das Groß- und Basisschadendreieck aus Option 2 unplausibel.

Idee

Verwendung von Chain Ladder-Annahme für Dreiecke mit fixiertem Informationsniveau

$$\mathrm{E}(L^{(j)}_{i,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) = l^{(j)}_j \cdot L^{(j)}_{i,j},$$
$$\mathrm{E}(A^{(j)}_{i,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) = a^{(j)}_j \cdot A^{(j)}_{i,j}$$

und Modellierung der „neuen“ Großschäden

$$L^{(j+1)}_{i,j+1} - L^{(j)}_{i,j+1} \quad \text{und} \quad A^{(j)}_{i,j+1} - A^{(j+1)}_{i,j+1}$$

mit kollektiven Modellen (Übergang zum nächsten Informationsniveau).

Probleme:

- $A^{(j)}_{i,j+1}$ und $A^{(j)}_{i,j+1} - A^{(j+1)}_{i,j+1}$ nicht unabhängig, gegeben $\mathcal{B}_j$.
- Die Entwicklung $A^{(j)}_{i,j} \to A^{(j)}_{i,j+1}$ beinhaltet die Schäden, die in diesem Schritt groß werden (ungünstig für Stabilität des Verfahrens).

Lösung

Verwendung der Annahmen

$$\mathrm{E}(L_{i,j+1}^{(j)} \,|\, \mathcal{B}_j) = l_j \cdot L_{i,j}^{(j)}, \tag{1}$$

$$\mathrm{E}(A_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, \ldots) = a_j \cdot A_{i,j}^{(j+1)}, \tag{2}$$

und Modellierung von

$$\Delta_{i,j+1}^{I} := L_{i,j+1}^{(j+1)} - L_{i,j+1}^{(j)} \quad \text{und} \quad \Delta_{i,j}^{P} := A_{i,j}^{(j)} - A_{i,j}^{(j+1)} \tag{3}$$

mit kollektiven Modellen.

Vorteil: Die Annahmen (1), (2) und (3) beziehen sich auf drei disjunkte Mengen von Schäden!

$\Rightarrow$ Unabhängigkeitsannahme plausibel

Lösung

Bemerkung:

(1) ist eine Annahme über die Großschäden, die bereits in den ersten j Abwicklungsjahren die Großschadengrenze T überschritten haben.

(2) ist eine Annahme über die Schäden, die auch nach dem $(j+1)$-ten Abwicklungsjahr noch nicht als Großschaden erkannt sind.

(3) ist eine Annahme über die Schäden, die genau im Abwicklungsjahr $j+1$ neu als Großschaden erkannt werden.

Lösung

Frage: Wie lautet die Bedingung „…“ in der Annahme (2)?

Die Chain Ladder-Bedingung für die Basisschäden vom Informationsniveau $j+1$ lautet

$$\mathrm{E}(A_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, A_{i,1}^{(j+1)}, \ldots, A_{i,j}^{(j+1)}) = a_j \cdot A_{i,j}^{(j+1)}.$$

Nimmt man noch die restliche nach j Abwicklungsjahren verfügbare Information dazu, so erhält man

$$\mathrm{E}(A_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, \mathcal{B}_j, A_{i,j}^{(j+1)}) = a_j \cdot A_{i,j}^{(j+1)}.$$

Ein CL-basiertes Modell für Großschäden

Chain Ladder-Bedingungen

Annahme 1: Die Anfalljahre sind unabhängig.

Annahme 2: Es gibt $n_j \geq 1$ und $a_j, l_j > 0$ so dass

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}(N_{i,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) = n_j \cdot N_{i,j}, \\ &\mathsf{E}(A_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, \mathcal{B}_j, A_{i,j}^{(j+1)}) = a_j \cdot A_{i,j}^{(j+1)}, \\ &\mathsf{E}(L_{i,j+1}^{(j)} \,|\, \mathcal{B}_j) = l_j \cdot L_{i,j}^{(j)}. \end{aligned}$$

Annahme 3: Es gibt $\nu_j, \alpha_j, \lambda_j > 0$ so dass

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(N_{i,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) = \nu_j^2 \cdot N_{i,j}, \\ &\mathrm{Var}(A_{i,j+1}^{(j+1)} \,|\, \mathcal{B}_j, A_{i,j}^{(j+1)}) = \alpha_j^2 \cdot A_{i,j}^{(j+1)}, \\ &\mathrm{Var}(L_{i,j+1}^{(j)} \,|\, \mathcal{B}_j) = \lambda_j^2 \cdot L_{i,j}^{(j)}. \end{aligned}$$

Modellierung neuer Großschäden

Annahme 4: Gegeben $\mathcal{B}_j$, sind

$$\Delta^P_{i,j} := A^{(j)}_{i,j} - A^{(j+1)}_{i,j} = \sum_{\nu=N_{i,j}+1}^{N_{i,j+1}} X^P_{i,\nu,j},$$

$$\Delta^I_{i,j+1} := L^{(j+1)}_{i,j+1} - L^{(j)}_{i,j+1} = \sum_{\nu=N_{i,j}+1}^{N_{i,j+1}} X^I_{i,\nu,j+1}$$

kollektive Modelle. Es gibt $x^P_j, x^I_j, \xi^P_j, \xi^I_j > 0, \rho_j \in \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^P_{i,\nu,j} \,|\, \mathcal{B}_j) &= x^P_j, & \mathrm{E}(X^I_{i,\nu,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) &= x^I_{j+1}, \\ \mathrm{Var}(X^P_{i,\nu,j} \,|\, \mathcal{B}_j) &= (\xi^P_j)^2, & \mathrm{Var}(X^I_{i,\nu,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) &= (\xi^I_{j+1})^2, \\ \mathrm{Cov}(X^P_{i,\nu,j}, X^I_{i,\nu,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) &= \rho_j, & \mathrm{Cov}(X^P_{i,\nu,j}, X^I_{i,\mu,j+1} \,|\, \mathcal{B}_j) &= 0 \end{aligned}$$

für $\nu, \mu \in \{N_{i,j}+1, \ldots, N_{i,j+1}\}$ und $\mu \neq \nu$.

Unabhängigkeitsannahmen

Sind die σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bedingt unabhängig, gegeben $\mathcal{C}$, so schreiben wir

$$\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \,|\, \mathcal{C}.$$

Annahme 5: Für $j = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$\begin{aligned}
A_{i,j+1}^{(j+1)} &\perp (L_{i,j+1}^{(j)}, \Delta_{i,j+1}^{I}) \,|\, (\mathcal{B}_j, N_{i,j+1}, A_{i,j}^{(j+1)}), \\
A_{i,j+1}^{(j+1)} &\perp N_{i,j+1} \,|\, (\mathcal{B}_j, A_{i,j}^{(j+1)}), \\
L_{i,j+1}^{(j)} &\perp (N_{i,j+1}, \Delta_{i,j}^{P}, \Delta_{i,j+1}^{I}) \,|\, \mathcal{B}_j.
\end{aligned}$$

IBNR-Verfahren ('Bifurcation Method')

Gegeben die Information $\mathcal{D}$ setzen wir

$$\widehat{n}_j := \frac{\sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j}}, \quad \widehat{a}_j := \frac{\sum_{i=1}^{n-j} A_{i,j+1}^{(j+1)}}{\sum_{i=1}^{n-j} A_{i,j}^{(j+1)}}, \quad \widehat{l}_j := \frac{\sum_{i=1}^{n-j} L_{i,j+1}^{(j)}}{\sum_{i=1}^{n-j} L_{i,j}^{(j)}},$$

$$\widehat{d}_j^P := \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \Delta_{i,j}^P}{\sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j}} \quad \text{and} \quad \widehat{d}_j^I := \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \Delta_{i,j+1}^I}{\sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j}}.$$

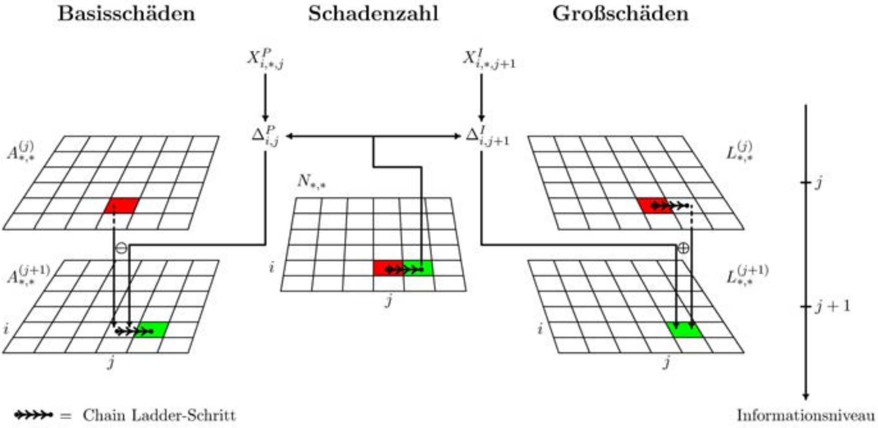
Setze $\widehat{N}_{i,j} := N_{i,j}$, $\widehat{A}_{i,j}^{(k)} := A_{i,j}^{(k)}$ und $\widehat{L}_{i,j}^{(k)} := L_{i,j}^{(k)}$ für alle i, j, k mit $i + \max(j,k) \leq n+1$. Für $j \geq n-i+1$ definiere rekursiv

$$\widehat{N}_{i,j+1} := \widehat{n}_j \widehat{N}_{i,j}, \quad \widehat{A}_{i,j}^{(j+1)} := \widehat{A}_{i,j}^{(j)} - \widehat{d}_j^P \widehat{N}_{i,j}, \quad \widehat{A}_{i,j+1}^{(j+1)} := \widehat{a}_j \widehat{A}_{i,j}^{(j+1)},$$

$$\widehat{L}_{i,j+1}^{(j)} := \widehat{l}_j \widehat{L}_{i,j}^{(j)} \quad \text{und} \quad \widehat{L}_{i,j+1}^{(j+1)} := \widehat{L}_{i,j+1}^{(j)} + \widehat{d}_j^I \widehat{N}_{i,j}.$$

$\Rightarrow$ $\widehat{A}_{i,n}^{(n)}$ und $\widehat{L}_{i,n}^{(n)}$ Schätzer für ausregulierte Basis- und Großschäden.

IBNR-Verfahren ('Bifurcation Method')



Erwartungstreue der Schätzer

Notation: Sei $\mathcal{D}_{n-i+1} := \mathcal{D} \cap \mathcal{B}_{n-i+1}$

Lemma:

Gegeben die Bedingung $\mathcal{D}_{n-i+1}$ sind

$$\widehat{A}_{i,n}^{(n)} \qquad \text{und} \qquad \widehat{L}_{i,n}^{(n)}$$

erwartungstreue Schätzer für die erwartete ausregulierten Basis- und Großschäden, d.h. für

$$\mathrm{E}(A_{i,n}^{(n)} \,|\, \mathcal{D}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E}(L_{i,n}^{(n)} \,|\, \mathcal{D}).$$

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	
2012	100	200		
2013	100			

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	
2012	100	100		
2013	100			

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	
2012	0	100		
2013	0			

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	
2012	1	2		
2013	1			

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013				

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10		
2012	10			
2013				

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	
2012	100	200		
2013	100			

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	
2012	100	100		
2013	100			

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	
2012	0	100		
2013	0			

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013				

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10		
2012	10			
2013				

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	
2012	100	200		
2013	100			

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	
2012	100	100		
2013	100			

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	
2012	0	100		
2013	0			

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$\ominus$

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013				

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10		
2012	10			
2013	10			

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	
2012	100	200		
2013	100			

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	
2012	100	100		
2013	100	100		

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	
2012	0	100		
2013	0			

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013				

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10	0	
2012	10	10	0	
2013	10	10	0	

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	
2012	100	200		
2013	100			

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	0
2012	100	100	100	0
2013	100	100	100	0

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	
2012	0	100		
2013	0	100		

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013				

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10	0	
2012	10	10	0	
2013	10	10	0	

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

Swiss Re

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	
2012	100	200		
2013	100	200		

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	0
2012	100	100	100	0
2013	100	100	100	0

$\oplus$

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	
2012	0	100		
2013	0	100		

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013				

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10	0	
2012	10	10	0	
2013	10	10	0	

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	450
2012	100	200	300	450
2013	100	200	300	450

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	0
2012	100	100	100	0
2013	100	100	100	0

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	450
2012	0	100	200	450
2013	0	100	200	450

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013	890			

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10	0	
2012	10	10	0	
2013	10	10	0	

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900			

$\ominus$

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	450
2012	100	200	300	450
2013	100	200	300	450

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	0
2012	100	100	100	0
2013	100	100	100	0

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	450
2012	0	100	200	450
2013	0	100	200	450

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990		
2012	890			
2013	890			

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10	0	
2012	10	10	0	
2013	10	10	0	

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	
2012	900	1.000		
2013	900	1.000		

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	450
2012	100	200	300	450
2013	100	200	300	450

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	0
2012	100	100	100	0
2013	100	100	100	0

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	450
2012	0	100	200	450
2013	0	100	200	450

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990	1.200	
2012	890	990	1.200	
2013	890	990	1.200	

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10	0	
2012	10	10	0	
2013	10	10	0	

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	1.350
2012	900	1.000	1.200	1.350
2013	900	1.000	1.200	1.350

Anwendung auf unser Beispiel von oben

$L_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	200	300	450
2011	100	200	300	450
2012	100	200	300	450
2013	100	200	300	450

$\Delta_{i,j}^{I}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	100	100	100	0
2011	100	100	100	0
2012	100	100	100	0
2013	100	100	100	0

$L_{i,j}^{(j-1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	0	100	200	450
2011	0	100	200	450
2012	0	100	200	450
2013	0	100	200	450

$N_{i,j}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	1	2	3	3
2011	1	2	3	3
2012	1	2	3	3
2013	1	2	3	3

$A_{i,j}^{(j+1)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	890	990	1.200	
2011	890	990	1.200	
2012	890	990	1.200	
2013	890	990	1.200	

$\Delta_{i,j}^{P}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	10	10	0	
2011	10	10	0	
2012	10	10	0	
2013	10	10	0	

$A_{i,j}^{(j)}$

Anfalljahr i \ Abwicklungsjahr j	1	2	3	4
2010	900	1.000	1.200	1.350
2011	900	1.000	1.200	1.350
2012	900	1.000	1.200	1.350
2013	900	1.000	1.200	1.350

Stabilität des Verfahrens

Frage:

Ist das Verfahren instabil, da die Großschäden erst ab dem Zeitpunkt separiert zu dem sie bekannt werden?

Antwort:

Bei jedem Schritt werden die neuen Großschäden durch ein kollektives Modell abgebildet und aus den Groß- und Basisschäden herausgenommen. Chain Ladder wird stets nur auf Dreiecke angewendet, in denen es keine Sprünge durch die neuen Großschäden gibt.

Chain Ladder auf Basis- und Großschadendreieck?

Frage:

Ist es sinnvoll Chain Ladder auf Groß- und Basisschadendreieck aus Option 2 anzuwenden?

Antwort:

Dieses Vorgehen wird durch kein plausibles stochastisches Modell gestützt und ist daher mit Vorsicht anzuwenden.

In der Praxis sind die Ergebnisse jedoch oft ähnlich wie bei der vorgestellten Methode. Daher als pragmatische Näherungslösung durchaus eine vernünftige Möglichkeit.

Andere IBNR-Verfahren

- Die Chain Ladder-Annahme für die Schadenzahl lässt sich ohne weiteres durch die Annahmen einer anderen IBNR-Methode ersetzen.
- Das vorgestellte Chain Ladder-basierte Verfahren lässt sich auf den additiven Fall übertragen.
- Auf die Dreiecke aus Option 2 lassen sich natürlich beliebige IBNR-Verfahren anwenden. Ob dies sinnvoll ist, muss fallweise geprüft werden.

Fazit

- Es gibt Situationen, in denen man Groß- und Kleinschäden trennen sollte.
- Herausforderung: Konsistente Behandlung der Anfalljahre.
- Das vorgestellte Verfahren ist konsistent über die Anfalljahre und wird durch ein plausibles stochastisches Modell gestützt.
- Das stochastische Modell erlaubt die Berechnung des Standardfehlers (siehe Anhang).

Literatur

Riegel, U. (2014) A Bifurcation Approach for Attritional and Large Losses in Chain Ladder Calculations, *Astin Bulletin*, **44(1)**, 127–172

Zeit für Fragen!

Anhang A: Berechnung des Standardfehlers

Technischer Hilfssatz

Lemma:

Mit $d_j^P := (n_j - 1)x_j^P$ und $(\delta_j^P)^2 := (n_j - 1)(\xi_j^P)^2 + \nu_j^2(x_j^P)^2$ gilt

$$\mathrm{E}(\Delta_{i,j}^P \,|\, \mathcal{B}_j) = d_j^P N_{i,j} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(\Delta_{i,j}^P \,|\, \mathcal{B}_j) = (\delta_j^P)^2 N_{i,j}.$$

Mit $d_j^I := (n_j - 1)x_{j+1}^I$ und $(\delta_j^I)^2 := (n_j - 1)(\xi_{j+1}^I)^2 + \nu_j^2(x_{j+1}^I)^2$ gilt

$$\mathrm{E}(\Delta_{i,j+1}^I \,|\, \mathcal{B}_j) = d_j^I N_{i,j} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(\Delta_{i,j+1}^I \,|\, \mathcal{B}_j) = (\delta_j^I)^2 N_{i,j}.$$

Mit $\gamma_j := (n_j - 1)\rho_j + \nu_j^2 x_j^P x_{j+1}^I$ gilt ferner

$$\mathrm{Cov}(\Delta_{i,j}^P, \Delta_{i,j+1}^I \,|\, \mathcal{B}_j) = \gamma_j N_{i,j}.$$

Notation: $\mathcal{D}$ sei die Information nach dem Kalenderjahr $n+1$

Alternative Darstellung des Modells

Zur Berechnung des Standardfehlers ist es günstig, das Modell in einer anderen Darstellung zu schreiben (folgt aus den Modell-Annahmen, ist aber nicht äquivalent).

Seien $f_j^{A,N} := -a_j d_j^P$, $f_j^{A,A} := a_j$, $f_j^{L,N} := d_j^I$, $f_j^{L,L} := l_j$, $f_j^{N,N} := n_j$.

Dann gilt

$$\mathrm{E}\left(\begin{array}{c} A_{i,j+1}^{(j+1)} \\ L_{i,j+1}^{(j+1)} \\ N_{i,j+1} \end{array} \middle| \mathcal{B}_j \right) = \begin{pmatrix} f_j^{A,A} & 0 & f_j^{A,N} \\ 0 & f_j^{L,L} & f_j^{L,N} \\ 0 & 0 & f_j^{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i,j}^{(j)} \\ L_{i,j}^{(j)} \\ N_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Alternative Darstellung des Modells

Mit $\sigma_j^{A,N} := a_j^2(\delta_j^P)^2 - \alpha_j^2 d_j^P$, $\sigma_j^{A,A} := \alpha_j^2$, $\sigma_j^{L,N} := (\delta_j^I)^2$, $\sigma_j^{L,L} := \lambda_j^2$, $\sigma_j^{N,N} := \nu_j^2$, $\rho_j^{A,N} := -a_j x_j^P \nu_j^2$, $\rho_j^{L,N} := x_{j+1}^I \nu_j^2$ und $\rho_j^{A,L} := -a_j \gamma_j$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(A_{i,j+1}^{(j+1)} \mid \mathcal{B}_j) &= \sigma_j^{A,N} N_{i,j} + \sigma_j^{A,A} A_{i,j}^{(j)}, \\
\operatorname{Var}(L_{i,j+1}^{(j+1)} \mid \mathcal{B}_j) &= \sigma_j^{L,N} N_{i,j} + \sigma_j^{L,L} L_{i,j}^{(j)}, \\
\operatorname{Var}(N_{i,j+1} \mid \mathcal{B}_j) &= \sigma_j^{N,N} N_{i,j}, \\
\operatorname{Cov}(A_{i,j+1}^{(j+1)}, N_{i,j+1} \mid \mathcal{B}_j) &= \rho_j^{A,N} N_{i,j}, \\
\operatorname{Cov}(L_{i,j+1}^{(j+1)}, N_{i,j+1} \mid \mathcal{B}_j) &= \rho_j^{L,N} N_{i,j}, \\
\operatorname{Cov}(L_{i,j+1}^{(j+1)}, A_{i,j+1}^{(j+1)} \mid \mathcal{B}_j) &= \rho_j^{A,L} N_{i,j}.
\end{aligned}
$$

(Beweis aufwändig.)

Mittlerer quadratischer Fehler

Seien $w^A = (w_1^A, \dots, w_n^A)$ und $w^L = (w_1^L, \dots, w_n^L) \in [0,1]^n$.

Mittlerer quadratischer Fehler:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mse}(w^A, w^L) \\
&\quad := \mathrm{mse}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(w_i^A \widehat{A}_{i,n}^{(n)} + w_i^L \widehat{L}_{i,n}^{(n)}\right)\right) \\
&\quad := \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left((w_i^A A_{i,n} + w_i^L L_{i,n}) - (w_i^A \widehat{A}_{i,n}^{(n)} + w_i^L \widehat{L}_{i,n}^{(n)})\right)\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{D}\right].
\end{aligned}$$

Standardfehler:

$$\mathrm{s.\,e.}(w^A, w^L) := \sqrt{\mathrm{mse}(w^A, w^L)}$$

Mittlerer quadratischer Fehler

Wir zerlegen den mittleren quadratischen Fehler $\mathrm{mse}(w^A, w^L)$ in den *Zufallsfehler* $\mathrm{pvar}(w^A, w^L)$ und den *Schätzfehler* $\mathrm{spee}(w^A, w^L)$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mse}(w^A, w^L)\\
&\quad = \underbrace{\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}(w_i^A A_{i,n} + w_i^L L_{i,n}) \,\middle|\, \mathcal{D}\right]}_{\text{Zufallsfehler}}\\
&\qquad + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(w_i^A \widehat{A}_{i,n}^{(n)} + w_i^L \widehat{L}_{i,n}^{(n)}\right) - \left(w_i^A \,\mathrm{E}(A_{i,n} \,|\, \mathcal{D}) + w_i^L \,\mathrm{E}(L_{i,n} \,|\, \mathcal{D})\right)\right)^2}_{\text{Schätzfehler}}\\
&\quad =: \mathrm{pvar}(w^A, w^L) + \mathrm{spee}(w^A, w^L).
\end{aligned}$$

Zufallsfehler

Für den Zufallsfehler gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{pvar}(w^A, w^L) &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \operatorname{Cov}\left(w_{i_1}^A A_{i_1,n} + w_{i_1}^L L_{i_1,n}, w_{i_2}^A A_{i_2,n} + w_{i_2}^L L_{i_2,n} \,\middle|\, \mathcal{D}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\left(w_i^A A_{i,n} + w_i^L L_{i,n} \,\middle|\, \mathcal{D}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big[(w_i^A)^2 \operatorname{Var}(A_{i,n} \,|\, \mathcal{D}) + 2 w_i^A w_i^L \operatorname{Cov}(A_{i,n}, L_{i,n} \,|\, \mathcal{D}) \\
&\qquad\qquad + (w_i^L)^2 \operatorname{Var}(L_{i,n} \,|\, \mathcal{D}) \Big].
\end{aligned}$$

Zufallsfehler

Seien x_1, x_2, y_1, y_2 Platzhalter für 'N', 'A', and 'L'. Mit den Schätzern

$$\varphi_j^{x_1x_2,y_1y_2} := \widehat{f}_j^{x_1x_2}\widehat{f}_j^{y_1y_2} - \widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{f}_j^{x_1x_2}, \widehat{f}_j^{y_1y_2} \,|\, \mathcal{D}_j)$$

für $f_j^{x_1x_2}f_j^{y_1y_2}$ definieren wir

$$\mathbf{F}_j := \begin{pmatrix} \varphi_j^{NN,NN} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_j^{AN,AN} & \varphi_j^{AA,AA} & 2\varphi_j^{AA,AN} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_j^{AN,NN} & 0 & \varphi_j^{AA,NN} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_j^{LN,LN} & 0 & 0 & \varphi_j^{LL,LL} & 2\varphi_j^{LL,LN} & 0 \\ \varphi_j^{LN,NN} & 0 & 0 & 0 & \varphi_j^{LL,NN} & 0 \\ \varphi_j^{AN,LN} & 0 & \varphi_j^{AA,LN} & 0 & \varphi_j^{AN,LL} & \varphi_j^{AA,LL} \end{pmatrix}.$$

Zufallsfehler

Ferner

$$\mathbf{p}_{i,j} := \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_j^{N,N}\widehat{N}_{i,j} \\ \widehat{\sigma}_j^{A,N}\widehat{N}_{i,j} + \widehat{\sigma}_j^{A,A}\widehat{A}_{i,j}^{(j)} \\ \widehat{\rho}_j^{A,N}\widehat{N}_{i,j} \\ \widehat{\sigma}_j^{L,N}\widehat{N}_{i,j} + \widehat{\sigma}_j^{L,L}\widehat{L}_{i,j}^{(j)} \\ \widehat{\rho}_j^{L,N}\widehat{N}_{i,j} \\ \widehat{\rho}_j^{A,L}\widehat{N}_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Damit können wir Schätzer $\mathfrak{P}_{i,n}^{A,A}$, $\mathfrak{P}_{i,n}^{L,L}$ und $\mathfrak{P}_{i,n}^{A,L}$ für $\mathrm{Var}(A_{i,n} \,|\, \mathcal{D})$, $\mathrm{Var}(L_{i,n} \,|\, \mathcal{D})$ und $\mathrm{Cov}(A_{i,n}, L_{i,n} \,|\, \mathcal{D})$ berechnen und in die Formel für den Zufallsfehler $\mathrm{pvar}(w^A, w^L)$ einsetzen.

Zufallsfehler

Für $i = 1, \ldots, n$ sei

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{i,n}^{N,N} \\ \mathfrak{P}_{i,n}^{A,A} \\ \mathfrak{P}_{i,n}^{A,N} \\ \mathfrak{P}_{i,n}^{L,L} \\ \mathfrak{P}_{i,n}^{L,N} \\ \mathfrak{P}_{i,n}^{A,L} \end{pmatrix} := \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \mathbf{F}_{n-1} \cdots \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{p}_{i,j}$$

(mit $\mathbf{F}_{n-1} \cdots \mathbf{F}_{n} \mathbf{p}_{i,n-1} := \mathbf{p}_{i,n-1}$). Dann

$$\widehat{\mathrm{pvar}}(w^A, w^L) := \sum_{i=1}^{n} \left((w_i^A)^2 \mathfrak{P}_{i,n}^{A,A} + 2 w_i^A w_i^L \mathfrak{P}_{i,n}^{A,L} + (w_i^L)^2 \mathfrak{P}_{i,n}^{L,L} \right).$$

Vergleich mit der Formel für Chain Ladder

Beachte:

Der Zufallsfehler des normalen Chain Ladder-Verfahren hat im Prinzip die gleiche Struktur:

$$\widehat{\mathrm{pvar}}(\widehat{C}_{i,n}) = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_{n-1}^2 \cdots \widehat{f}_{j+1}^2 \widehat{\sigma}_j^2 \widehat{C}_{i,j}.$$

Schätzfehler

Für den Schätzfehler verwenden wir das „Conditional Resampling“:

Sei P^* das Produktmaß von

$$\begin{aligned}\mathsf{P}^*\Big((\widehat{f}_j^{A,N}, \widehat{f}_j^{A,A}, \widehat{f}_j^{L,N}, \widehat{f}_j^{L,L}, \widehat{f}_j^{N,N}) \in A\Big) \\ := \mathsf{P}\left((\widehat{f}_j^{A,N}, \widehat{f}_j^{A,A}, \widehat{f}_j^{L,N}, \widehat{f}_j^{L,L}, \widehat{f}_j^{N,N}) \in A \,\middle|\, \mathcal{D}_j\right)\end{aligned}$$

und seien E^*, Var^* und Cov^* Erwartungswert, Varianz und Kovarianz bezüglich dieses Maßes.

Wir interpretieren $\mathrm{spee}(w^A, w^L)$ als Funktion der Variablen

$$\widehat{f}_j^{A,N}, \widehat{f}_j^{A,A}, \widehat{f}_j^{L,N}, \widehat{f}_j^{L,L}, \widehat{f}_j^{N,N}.$$

Swiss Re

Schätzfehler

Wir verwenden die Approximation

$$\begin{aligned}
&\operatorname{spee}(w^A, w^L) \\
&\quad \approx \mathrm{E}^*(\operatorname{spee}(w^A, w^L)) \\
&\quad = \operatorname{Var}^* \left(\sum_{i=1}^{n} \left(w_i^A \widehat{A}_{i,n}^{(n)} + w_i^L \widehat{L}_{i,n}^{(n)} \right) \right) \\
&\quad = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \Big[w_{i_1}^A w_{i_2}^A \operatorname{Cov}^*(\widehat{A}_{i_1,n}^{(n)}, \widehat{A}_{i_2,n}^{(n)}) + 2 w_{i_1}^A w_{i_2}^L \operatorname{Cov}^*(\widehat{A}_{i_1,n}^{(n)}, \widehat{L}_{i_2,n}^{(n)}) \\
&\qquad\qquad + w_{i_1}^L w_{i_2}^L \operatorname{Cov}^*(\widehat{L}_{i_1,n}^{(n)}, \widehat{L}_{i_2,n}^{(n)}) \Big].
\end{aligned}$$

Schätzfehler

Für Platzhalter x_1, x_2, y_1, y_2 definieren wir

$$\beta_j^{x_1x_2,y_1y_2} := \widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{f}_j^{x_1x_2}, \widehat{f}_j^{y_1y_2} \mid \mathcal{D}_j)$$

und

$$\mathbf{e}_{(i_1,i_2),j} := \begin{pmatrix} \beta_j^{NN,NN} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_j^{AN,AN} & \beta_j^{AA,AA} & 0 & \beta_j^{AA,AN} & \beta_j^{AA,AN} \\ \beta_j^{AN,NN} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_j^{LN,LN} & 0 & \beta_j^{LL,LL} & 0 & 0 \\ \beta_j^{LN,NN} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_j^{AN,LN} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{N}_{i_1,j}\widehat{N}_{i_2,j} \\ \widehat{A}_{i_1,j}^{(j)}\widehat{A}_{i_2,j}^{(j)} \\ \widehat{L}_{i_1,j}^{(j)}\widehat{L}_{i_2,j}^{(j)} \\ \widehat{A}_{i_1,j}^{(j)}\widehat{N}_{i_2,j} \\ \widehat{N}_{i_1,j}\widehat{A}_{i_2,j}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Damit können wir Schätzer $\mathfrak{E}_{(i_1,i_2),n}^{A,A}$, $\mathfrak{E}_{(i_1,i_2),n}^{L,L}$ und $\mathfrak{E}_{(i_1,i_2),n}^{A,L}$ für $\mathrm{Cov}^*(\widehat{A}_{i_1,n}^{(n)}, \widehat{A}_{i_2,n}^{(n)})$, $\mathrm{Cov}^*(\widehat{L}_{i_1,n}^{(n)}, \widehat{L}_{i_2,n}^{(n)})$ und $\mathrm{Cov}^*(\widehat{A}_{i_1,n}^{(n)}, \widehat{L}_{i_2,n}^{(n)})$ berechnen und in die Formel für den Zufallsfehler $\mathrm{spee}(w^A, w^L)$ einsetzen.

Schätzfehler

Für $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\kappa(i_1, i_2) := \max(n - i_1 + 1, n - i_2 + 1)$ und

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}^{N,N}_{(i_1,i_2),n} \\ \mathfrak{E}^{A,A}_{(i_1,i_2),n} \\ \mathfrak{E}^{A,N}_{(i_1,i_2),n} \\ \mathfrak{E}^{L,L}_{(i_1,i_2),n} \\ \mathfrak{E}^{L,N}_{(i_1,i_2),n} \\ \mathfrak{E}^{A,L}_{(i_1,i_2),n} \end{pmatrix} := \sum_{j=\kappa(i_1,i_2)}^{n-1} \mathbf{F}_{n-1} \cdots \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{e}_{(i_1,i_2),j}$$

(mit $\mathbf{F}_{n-1} \cdots \mathbf{F}_n \mathbf{e}_{(i_1,i_2),n-1} := \mathbf{e}_{(i_1,i_2),n-1}$). Dann

$$\widehat{\text{spee}}(w^A, w^L) := \sum_{i_1,i_2=1}^{n} \left(w^A_{i_1} w^A_{i_2} \mathfrak{E}^{A,A}_{(i_1,i_2),n} + 2 w^A_{i_1} w^L_{i_2} \mathfrak{E}^{A,L}_{(i_1,i_2),n} + w^L_{i_1} w^L_{i_2} \mathfrak{E}^{L,L}_{(i_1,i_2),n} \right).$$

Swiss Re

Vergleich mit der Formel für Chain Ladder

Beachte:

Der Schätzfehler des normalen Chain Ladder-Verfahren hat im Prinzip die gleiche Struktur:

$$\widehat{\text{spee}}(\widehat{C}_{i,n}) = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_{n-1}^2 \cdots \widehat{f}_{j+1}^2 \widehat{\text{Var}}(\widehat{f}_j \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}) \widehat{C}_{i,j}^2.$$

Anhang B: Parameterschätzung

Parameter für das ursprüngliche Modell

Für $j = 1 \ldots, n-2$ haben wir $\mathcal{D}_j$-bedingt erwartungstreue Schätzer

$$\widehat{\nu}_j^2 := \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j} \left(\frac{N_{i,j+1}}{N_{i,j}} - \widehat{n}_j \right)^2 ,$$

$$\widehat{\alpha}_j^2 := \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} A_{i,j}^{(j+1)} \left(\frac{A_{i,j+1}^{(j+1)}}{A_{i,j}^{(j+1)}} - \widehat{a}_j \right)^2 ,$$

$$\widehat{\lambda}_j^2 := \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} L_{i,j}^{(j)} \left(\frac{L_{i,j+1}^{(j)}}{L_{i,j}^{(j)}} - \widehat{l}_j \right)^2 .$$

Für $j = n-1$:

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}_{n-1}^2 &:= \min(\widehat{\nu}_{n-2}^4 / \widehat{\nu}_{n-3}^2, \widehat{\nu}_{n-3}^2), \\ \widehat{\alpha}_{n-1}^2 &:= \min(\widehat{\alpha}_{n-2}^4 / \widehat{\alpha}_{n-3}^2, \widehat{\alpha}_{n-3}^2), \\ \widehat{\lambda}_{n-1}^2 &:= \min(\widehat{\lambda}_{n-2}^4 / \widehat{\lambda}_{n-3}^2, \widehat{\lambda}_{n-3}^2). \end{aligned}$$

Parameter für das ursprüngliche Modell

Die folgenden Schätzer sind $\mathcal{D}_j$-erwartungstreu unter der zusätzlichen Bedingung $\sum_{i=1}^{n-j}(N_{i,j+1} - N_{i,j}) \geq 2$:

$$(\widehat{\xi}_j^P)^2 := \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j+1} - N_{i,j}) - 1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{\kappa=N_{i,j}+1}^{N_{i,j+1}} \left(X_{i,\kappa,j}^P - \widehat{x}_j^P\right)^2 ,$$

$$(\widehat{\xi}_{j+1}^I)^2 := \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j+1} - N_{i,j}) - 1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{\kappa=N_{i,j}+1}^{N_{i,j+1}} \left(X_{i,\kappa,j+1}^I - \widehat{x}_{j+1}^I\right)^2 ,$$

$$\widehat{\rho}_j := \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j+1} - N_{i,j}) - 1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{\kappa=N_{i,j}+1}^{N_{i,j+1}} \left(X_{i,\kappa,j}^P - \widehat{x}_j^P\right) \left(X_{i,\kappa,j+1}^I - \widehat{x}_{j+1}^I\right) .$$

Swiss Re

Parameter für das ursprüngliche Modell

Im Fall $\sum_{i=1}^{n-j}(N_{i,j+1} - N_{i,j}) = 1$ verwenden wir die Schätzer

$$(\widehat{\xi}_j^P)^2 := \left(\frac{\widehat{x}_j^P}{\widehat{x}_{j-1}^P}\right)^2 (\widehat{\xi}_{j-1}^P)^2, \quad (\widehat{\xi}_{j+1}^I)^2 := \left(\frac{\widehat{x}_{j+1}^I}{\widehat{x}_j^I}\right)^2 (\widehat{\xi}_j^I)^2 \quad \text{und}$$

$$\widehat{\rho}_j := \frac{\widehat{x}_j^P \widehat{x}_{j+1}^I}{\widehat{x}_{j-1}^P \widehat{x}_j^I} \widehat{\rho}_{j-1}.$$

Für $\sum_{i=1}^{n-j}(N_{i,j+1} - N_{i,j}) = 0$:

$$(\widehat{\xi}_j^P)^2 := (\widehat{\xi}_{j+1}^I)^2 := \widehat{\rho}_j := 0.$$

Parameter für das ursprüngliche Modell

Für $(\delta_j^P)^2$, $(\delta_j^I)^2$ und γ_j verwenden wir die Schätzer

$$(\widehat{\delta}_j^P)^2 := (\widehat{n}_j - 1)(\widehat{\xi}_j^P)^2 + \widehat{\nu}_j^2 \left[(\widehat{x}_j^P)^2 - \frac{(\widehat{\xi}_j^P)^2}{\sum_{i=1}^{n-j}(N_{i,j+1} - N_{i,j})} \right],$$

$$(\widehat{\delta}_j^I)^2 := (\widehat{n}_j - 1)(\widehat{\xi}_{j+1}^I)^2 + \widehat{\nu}_j^2 \left[(\widehat{x}_{j+1}^I)^2 - \frac{(\widehat{\xi}_{j+1}^I)^2}{\sum_{i=1}^{n-j}(N_{i,j+1} - N_{i,j})} \right],$$

$$\widehat{\gamma}_j := (\widehat{n}_j - 1)\widehat{\rho}_j + \widehat{\nu}_j^2 \left[\widehat{x}_j^P \widehat{x}_{j+1}^I - \frac{\widehat{\rho}_j}{\sum_{i=1}^{n-j}(N_{i,j+1} - N_{i,j})} \right]$$

(mit der Konvention $\frac{0}{0} := 0$).

Parameter für die alternative Darstellung

Mit den Parameterschätzern des ursprünglichen Modells erhalten wir folgende Schätzer für die Parameter der alternativen Darstellung:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{f}_j^{A,N} := -\widehat{a}_j \widehat{d}_j^P, \quad \widehat{f}_j^{A,A} := \widehat{a}_j, \quad \widehat{f}_j^{L,N} := \widehat{d}_j^I, \\
&\widehat{f}_j^{L,L} := \widehat{l}_j, \quad \widehat{f}_j^{N,N} := \widehat{n}_j, \\
&\widehat{\sigma}_j^{A,N} := \left(\widehat{a}_j^2 - \frac{\widehat{\alpha}_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} A_{i,j}^{(j+1)}} \right) (\widehat{\delta}_j^P)^2 - \widehat{\alpha}_j^2 \widehat{d}_j^P, \\
&\widehat{\sigma}_j^{A,A} := \widehat{\alpha}_j^2, \quad \widehat{\sigma}_j^{L,N} := (\widehat{\delta}_j^I)^2, \quad \widehat{\sigma}_j^{L,L} := \widehat{\lambda}_j^2, \quad \widehat{\sigma}_j^{N,N} := \widehat{\nu}_j^2, \\
&\widehat{\rho}_j^{A,N} := -\widehat{a}_j \widehat{x}_j^P \widehat{\nu}_j^2, \quad \widehat{\rho}_j^{L,N} := \widehat{x}_{j+1}^I \widehat{\nu}_j^2, \quad \widehat{\rho}_j^{A,L} := -\widehat{a}_j \widehat{\gamma}_j.
\end{aligned}
$$

Parameter für die alternative Darstellung

Für die Berechnung des Standardfehlers, werden die $\mathcal{D}_j$-bedingten (Ko-)Varianzen der Schätzer $\widehat{f}_j^{N,N}$, $\widehat{f}_j^{A,A}$, $\widehat{f}_j^{A,N}$, $\widehat{f}_j^{L,L}$ und $\widehat{f}_j^{L,N}$ benötigt. Hierzu verwenden wir

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{d}_j^P \,|\, \mathcal{D}_j) := (\widehat{\delta}_j^P)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j} \ ,$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{d}_j^I \,|\, \mathcal{D}_j) := (\widehat{\delta}_j^I)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j} \ ,$$

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{d}_j^P, \widehat{d}_j^I \,|\, \mathcal{D}_j) := \widehat{\gamma}_j \Big/ \sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j} \ .$$

Parameter für die alternative Darstellung

Wir erhalten Schätzer für die Varianzen:

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{N,N} \,|\, \mathcal{D}_j) := \widehat{\nu}_j^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n-j} N_{i,j} \;,$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{A,A} \,|\, \mathcal{D}_j) := \widehat{\alpha}_j^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n-j} A_{i,j}^{(j+1)} \;,$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{L,L} \,|\, \mathcal{D}_j) := \widehat{\lambda}_j^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n-j} L_{i,j}^{(j)} \;,$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{A,N} \,|\, \mathcal{D}_j) := \widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{A,A} \,|\, \mathcal{D}_j)(\widehat{d}_j^P)^2 + \left[\widehat{a}_j^2 - \widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{A,A} \,|\, \mathcal{D}_j)\right] \widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{d}_j^P \,|\, \mathcal{D}_j),$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{L,N} \,|\, \mathcal{D}_j) := \widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{d}_j^I \,|\, \mathcal{D}_j).$$

Parameter für die alternative Darstellung

Ferner haben wir folgende Schätzer für die Kovarianzen:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{f}_j^{A,A}, \widehat{f}_j^{A,N} \,|\, \mathcal{D}_j) &:= -\widehat{d}_j^{P}\,\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{A,A} \,|\, \mathcal{D}_j),\\
\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{f}_j^{A,N}, \widehat{f}_j^{N,N} \,|\, \mathcal{D}_j) &:= -\widehat{a}_j \widehat{x}_j^{P}\,\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{N,N} \,|\, \mathcal{D}_j),\\
\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{f}_j^{L,N}, \widehat{f}_j^{N,N} \,|\, \mathcal{D}_j) &:= \widehat{x}_{j+1}^{I}\,\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_j^{N,N} \,|\, \mathcal{D}_j),\\
\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{f}_j^{A,N}, \widehat{f}_j^{L,N} \,|\, \mathcal{D}_j) &:= -\widehat{a}_j\,\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{d}_j^{P}, \widehat{d}_j^{I} \,|\, \mathcal{D}_j).
\end{aligned}
$$

Die restlichen Kovarianzen sind null.